Experiment 17: Dynamische Systeme in der Mikrobiologie

VerfasserInnen: Simona Capaul, Jasmin Hugi, Mirjam Kälin, Justyna Ruminska, Oliver Schneider

Betreuer: Roman Kälin

1. Einleitung

In einem dynamischen System ändern sich eine oder mehrere Grössen im Verlauf der Zeit. Die sich ändernden Grössen können auch systeminterne Grössen sein, welche nach aussen nicht in Erscheinung treten. Die Änderung kann auf Anregung von aussen hin erfolgen oder selbsttätig sein.
Beispiele von dynamischen Systemen sind Wetter, Seen, Wachstum einer Bakterienkultur, menschlicher Kreislauf, etc.
Der Nutzen der Simulation eines solchen dynamischen Systems besteht darin, dass verschiedene Variablen berücksichtigt und somit Gesetzmässigkeiten festgehalten werden können. Durch die Analyse und das Verständnis von komplexen Systemen ergeben sich Zeit- und Kostenersparnisse, da es möglich wird, Vorhersagen zu machen.
Probleme allerdings bestehen darin, sinnvolle Parameter zu finden, die der Natur auch wirklich entsprechen.

2. Wachstum in stetiger Zeit

2.1. Wachstum in stetiger Zeit ohne Beschränkung

Das Wachstum einer Bakterienpopulation ist im Allgemeinen proportional zur Grösse der vorhandenen Population, solange keine Begrenzungen wirksam werden.
Die folgende Gleichung zeigt exponentielles Wachstum und ist unter dem Namen Malthus' Gesetz bekannt. N bezeichnet die Anzahl Individuen, während μ die Wachstumsrate ist.

$$\mathbf{dN/dt = \mu \cdot N}$$

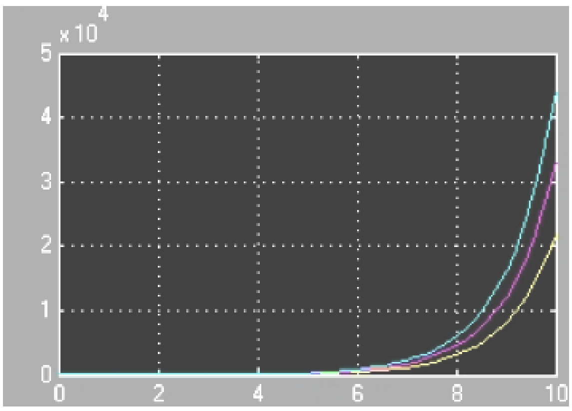

Abb.1: Exponentielles Wachstum

2.2. Wachstum in stetiger Zeit mit Beschränkung (logistisches Wachstum)

Der Lebensraum und die Umgebungsbedingungen begrenzen im Allgemeinen das exponentielle Wachstum, so dass sich die Population nicht zu beliebig vielen Individuen entwickeln kann.
Mathematisch lassen sich die Begrenzungen als Kapazitätsgrenzen (k) ausdrücken.
Diese Gleichung beschreibt das so genannte logistische Wachstumsverhalten:

$$dN/dt = \mu \cdot N \cdot (1- N/k)$$

Die Population stabilisiert sich nach dieser Gleichung beim Wert N = k, wobei sich bei kleinen Werten von N ein praktisch exponentielles Wachstum zeigt. Je kleiner μ, desto länger dauert es, bis die Kapazitätsgrenze erreicht ist.

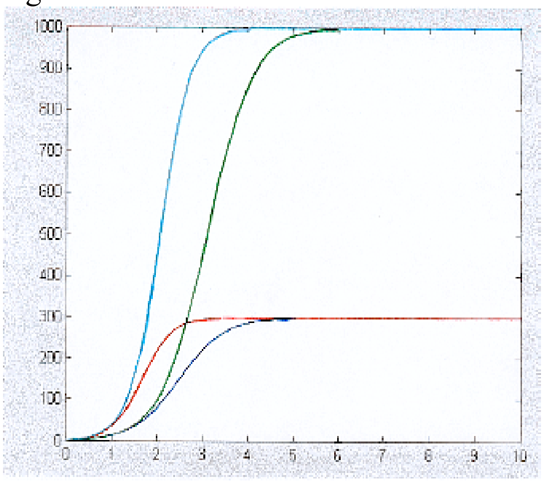

Abb.2: Logistisches Wachstum

3. Modelle

3.1. Lotka-Volterra-Modell für Räuber-Beute-Systeme

Im Pansen der Wiederkäuer befinden sich Prokaryoten als Beute und Ciliaten als Jäger. Die Beuteorganismen vermehren sich mit der Zuwachsrate a, wenn keine Räuberorganismen vorhanden sind. Der Bestand an Räuberorganismen (X_2) vermindert sich mit der Rate b, wenn keine Beute vorhanden ist. Die Anzahl gefressener Beuteorganismen ist proportional zur Anzahl vorhandener Beuteorganismen und proportional zur Anzahl Räuberorganismen. Die Abnahmerate der Beuteorganismen durch Gefressenwerden betrage c und die Zunahmerate der Räuberorganismen durch das Fressen von Beuteorganismen betrage d. Das System lässt sich mit den folgenden Differentialgleichungen beschreiben:

$$dX_1/dt = a \cdot X_1 - c \cdot X_1 \cdot X_2$$
$$dX_2/dt = d \cdot X_1 \cdot X_2 - b \cdot X_2$$

wobei X_1= Population der Beuteorganismen, X_2 = Population der Räuberorganismen.

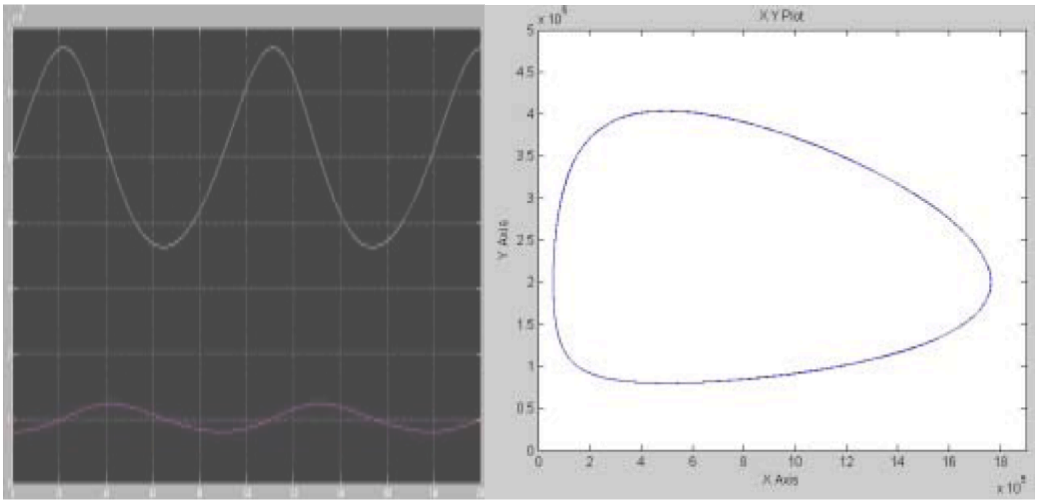

Abb.3: Lotka-Volterra-Modell für Räuber-Beute-System

Das Wachstum von Räuber wie Beute zeigt zyklische Schwingungen. Die Räuberpopulation zeigt eine Rechtsverschiebung gegenüber der Beutepopulation. Die rechte Grafik zeigt diesen Effekt im Zustandsdiagramm. Ein Zustandsdiagramm zeigt die Abhängigkeiten der Populationsgrößen voneinander.
In dieser xy-Grafik lässt sich das zyklische Verhalten dadurch erkennen, dass eine geschlossene Kurve beschrieben wird. (Weder Anfangs- noch Endpunkt sind vorhanden.) Die Zeitinformation geht dabei aber verloren.

Man kann das klassische Räuber-Beute-System erweitern, indem eine weitere Räubergattung in das Modell integriert wird. Die entsprechenden Differentialgleichungen sehen so aus:

$$\mathbf{dX_1/dt = a_1 \cdot X_1 - b_{12} \cdot X_1 \cdot X_2 - b_{13} \cdot X_1 \cdot X_3}$$
$$\mathbf{dX_2/dt = b_{21} \cdot X_1 \cdot X_2 - a_2 \cdot X_2}$$
$$\mathbf{dX_3/dt = b_{31} \cdot X_1 \cdot X_3 - a_3 \cdot X_3}$$

wobei X_1 = Beute, X_2 = Räuber a, X_3 = Räuber b.

Die Grafik zeigt, dass der eine Räuber nach einer gewissen Zeit ausstirbt.

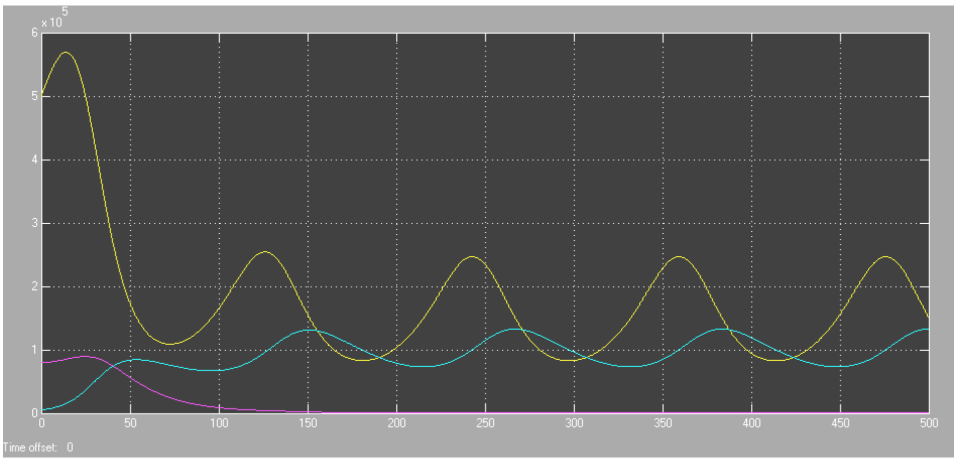

Abb.4: Räuber-Beute-System mit zwei Räubern.

3.2. Volterra-Prinzip

Im Pansen von Wiederkäuern sind die Bakterien und Archäen die Beuteorganismen für die Ciliaten (= Räuber). Beim Wechsel der sommerlichen Grasdiät zur Heudiät im Winter verändern sich beide Populationen mit der Rate e.

Das System mit

X_1 = Beutepopulation und
X_2 = Räuberpopulation

wird beschrieben durch die beiden Differentialgleichungen:

$$\mathbf{dX_1/dt = a \cdot X_1 - c \cdot X_1 \cdot X_2 - e \cdot X_1^2}$$
$$\mathbf{dX_2/dt = - b \cdot X_1 + d \cdot X_1 \cdot X_2 - e \cdot X_2^2}$$

Die obere Kurve stellt die Beute dar, während die untere die Räuber zeigt. Die Kurven beschreiben ein konvergentes Verhalten.

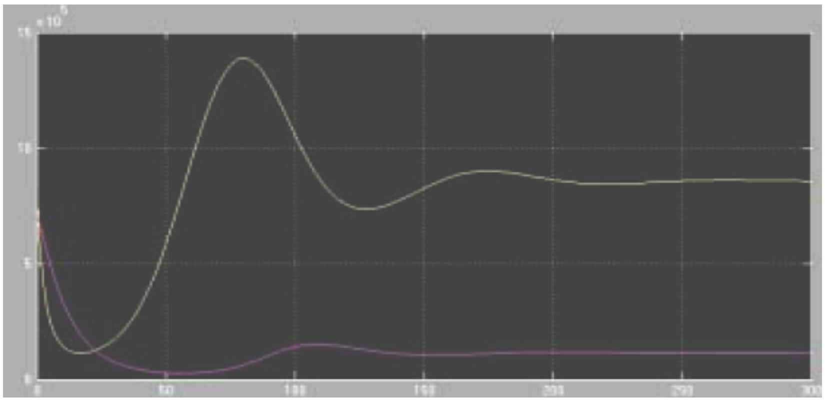

Abb.5: Volterra-Prinzip

4. Simulink als Hilfsmittel

Simulink ist ein Software-Paket zur Simulation dynamischer Systeme, wobei sowohl kontinuierliche als auch zeitdiskrete Systeme sowie Mischformen modelliert werden können.

Die Erstellung eines Modells geschieht graphisch, indem mit der Maus Blöcke aus einer Block-Bibliothek geholt und Signalleitungen zwischen ihnen gelegt werden. Zusätzlich zu einer großen Anzahl vordefinierter Blöcke kann man auch eigene Blöcke definieren.

Simulink ist ein Zusatzpaket zu dem Programm Matlab. Es basiert intern auf Matlab-Funktionen und erlaubt, zusätzlich zur graphisch orientierten Bedienung, Modelle von Matlab aus zu steuern und zu analysieren. Simulink kann ohne Matlab-Kenntnisse verwendet werden, allerdings bieten Matlab-Funktionen z.T. erweiterte Möglichkeiten.

Mit dem Programm Simulink kann man Differentialgleichungen numerisch lösen.

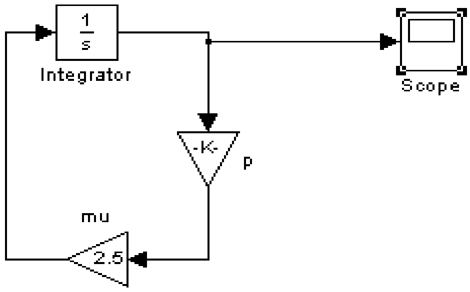

Abb.6: Graphisch orientierte Simulink-Darstellung einer Differentialgleichung

5. Quellenverzeichnis

www.simolife.unizh.ch