# Dynamische Systeme in der Mikrobiologie

Verfasst von: Blank Patricia, Gattlen Jasmin, Kaspar Romana (DI Gruppe G)

Betreut durch: Roman Kälin

BBOM, Buchkapitel: 6.1, 6.3-6.6, Hilfsmittel: www.simolife.unizh.ch

## 1. Einleitung

Systeme in der Realität zeichnen sich durch drei Faktoren aus:

- sie sind dynamisch, d.h. konstanter Veränderung ausgesetzt.
- sie sind komplex, d.h. von vielen Parametern abhängig.
- sie sind iterativ, d.h. die Gesetze, denen solche Systeme gehorchen, können durch Rückkopplung beschrieben werden.

Heutzutage ist man aufgrund der Komplexität solcher Systeme nicht in der Lage, dazugehörige Gesetze mathematisch vollständig zu erfassen. Dennoch ist es möglich, mit Hilfe von Computern ähnliche Systeme zu entwerfen und damit das Verhalten zu erforschen.

## 2. Wachstumsdynamik mikrobieller Populationen

Das Wachstumsverhalten von Populationen kann in einem mathematischen Modell dargestellt werden. In dieser ersten Übung werden einfache, aber vielseitig nützliche Wachstumsmodelle angewendet. Diese Modelle erlauben Beschreibungen und Prognosen über den Verlauf der Wachstumsentwicklung der ausgewählten Gruppe.

### Wachstum ohne Beschränkung (Exponentielles Wachstum)

Im Allgemeinen ist der Zuwachs von Individuen in einer Population proportional zur Gesamtgrösse der bereits vorhandenen Gruppe. Nimmt man an, dass jedes Individuum eine Chancengleichheit zur Vermehrung hat und keine Hinderung durch Nahrungsknappheit oder schlechter Umweltbedingungen vorliegt, wächst eine Population exponentiell.

Bei einer Stetigkeit der Individuen N mit einer Wachstumsrate μ, erhält man die Differentialgleichung

$$dN/dt = \mu \cdot N$$

Diese Differentialgleichung lässt sich mit dem Programm „Simulink“ numerisch lösen:

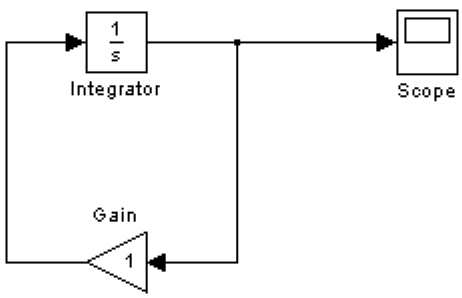


Abb. 1: Simulink- Modell zur numerischen Lösung

Weiter lässt sich die explizite Form schreiben als

$$\mathbf{N(t) = N_0 \cdot e^{\mu \cdot t}}$$

wobei $N_0$ die Anzahl der Individuen am Anfang beschreibt.

Das wichtigste Merkmal des exponentiellen Wachstums (auch natürliches Wachstum genannt) ist, dass die Zu- bzw. Abnahme in einem bestimmten Zeitintervall nicht konstant, sondern proportional abhängig zum jeweiligen vorhandenen Bestand an Individuen ist.

Mit verschiedenen Wachstumsraten erhält man folgende Kurven:

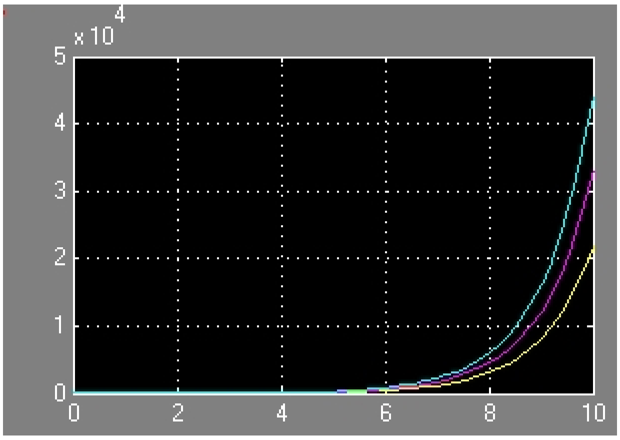


Abb.2: Exakte Lösung zu verschiedenen Wachstumsraten

**Wachstum mit Beschränkung (Logistisches Wachstum)**

In einer endlichen Welt kann weder lineares noch exponentielles Wachstum unbegrenzt andauern. Irgendwann ist eine Grenze erreicht, die nicht überschritten werden kann. Meistens sind diese Grenzen bedingt durch Umwelteinflüsse, z.B. begrenzte Nahrungsangebote, Ausbreitungseinschränkung etc.
Ein mathematisches Modell, in dem dies berücksichtigt wird, ist das logistische Wachstumsmodell, das der Belgier Pierre-Francois Verhulst (1804 - 1849) im Jahre 1837 vorschlug. Durch eine mit steigender Population fallende Wachstumsrate sorgt es dafür, dass schließlich ein stabiles Gleichgewicht erreicht wird. Dieses Modell kommt der Realität sehr nah, da es mehr Faktoren berücksichtigt, als das lineare, beschränkte oder exponentielle Wachstumsmodell.

Im unten stehenden Diagramm erkennt man, dass die Anzahl der Bakterien, die auf der y-Achse aufgetragen ist, am Anfang langsam steigt, die Wachstumsrate also gering ist. Sie nimmt dann jedoch zu, bis 50 % des Sättigungsmankos (oder der maximalen Anzahl an Bakterien) erreicht worden sind. Darauf nimmt die Wachstumsrate wieder ab, bis sie schließlich wieder gegen null strebt. Mathematisch lässt sich das logistische Wachstumsverhalten mit einer Kapazitätsgrenze k wie folgt beschreiben

$$\mathbf{dN/dt = \mu \cdot N \cdot (1 - N/k) \quad \text{mit } k=0,1,2,3,\ldots}$$

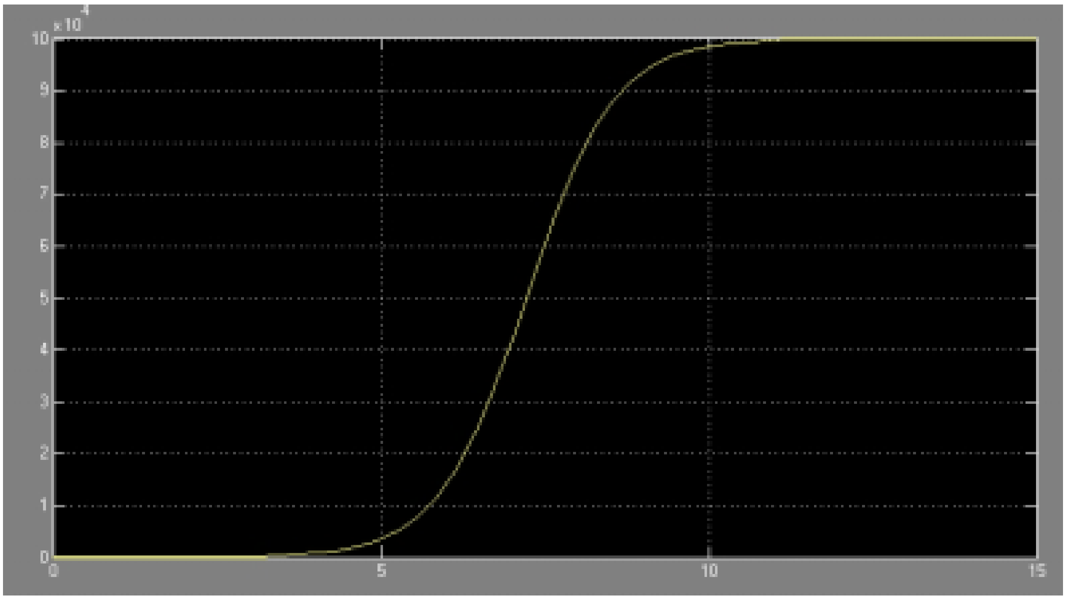


Abb.3 Logistisches Wachstum mit zeitlicher Verzögerung

Die anfangs wenigen Bakterien können sich aufgrund ihrer geringen Anzahl nur wenig vermehren und das Sättigungsmanko spielt noch eine geringe bzw. keine Rolle für die Fortpflanzung. Der 1. Teil des logistischen Wachstums gleicht einem exponentiellen Wachstum. Der 2. Teil gleicht jedoch einem begrenzten Wachstum, da mit zunehmender Anzahl jetzt die Wachstumsrate sinkt. Da das Sättigungsmanko immer kleiner wird, nimmt die Wachstumsrate immer mehr ab, bis sie schliesslich gegen Null strebt. Die Sättigung ist dann erreicht.

**Das Räuber-Beute-Prinzip (klassisches Modell)**

Ein weiteres Modell, zu welchem Beispiel aus der Natur existieren, ist das Räuber-Beute-Modell. Es beschreibt, wie sich die Räuber- und Beutepopulationen über die Zeit hinweg verhalten

Der Pansen von Wiederkäuern wird als geschlossenes System betrachtet. Im Pansen leben Bakterien und Archäen (beides Prokaryoten), deren Hauptfunktion der Abbau von pflanzlichen Polymeren (Zellulose, Hemizellulose, Pektin) ist.
Diese Prokaryoten (Beutepopulation) stellen die Nahrung für die Ciliaten (Räuberpopulation) dar. Die Räuber ernähren sich ausschliesslich von diesen Prokaryoten. Die Beuteorganismen können sich mit der Zuwachsrat a vermehren unter der Bedingung, dass keine Räuberorganismen vorhanden sind. Die Population der Räuber verringert sich mit der Rate b, wenn sie keine Nahrung finden. Die Zahl der gefressenen Beutelebewesen ist proportional zur Zahl der im Pansen existierenden Beutelebewesen und proportional zur Anzahl der Räuber. Die Abnahmerate der Beuteorganismen durch Gefressenwerden wird durch die Variable c beschrieben. Die Zunahmerate der Räuberorganismen aufgrund ausreichender Nahrungsquelle wird durch die Variable d dargestellt.

Das klassische Modell folgt der Gleichung

$$\mathbf{dX_1/dt = aX_1 - cX_1X_2} \qquad \mathbf{X_1 = Beute}$$
$$\mathbf{dX_2/dt = dX_1X_2 - bX_2} \qquad \mathbf{X_2 = Räuber}$$

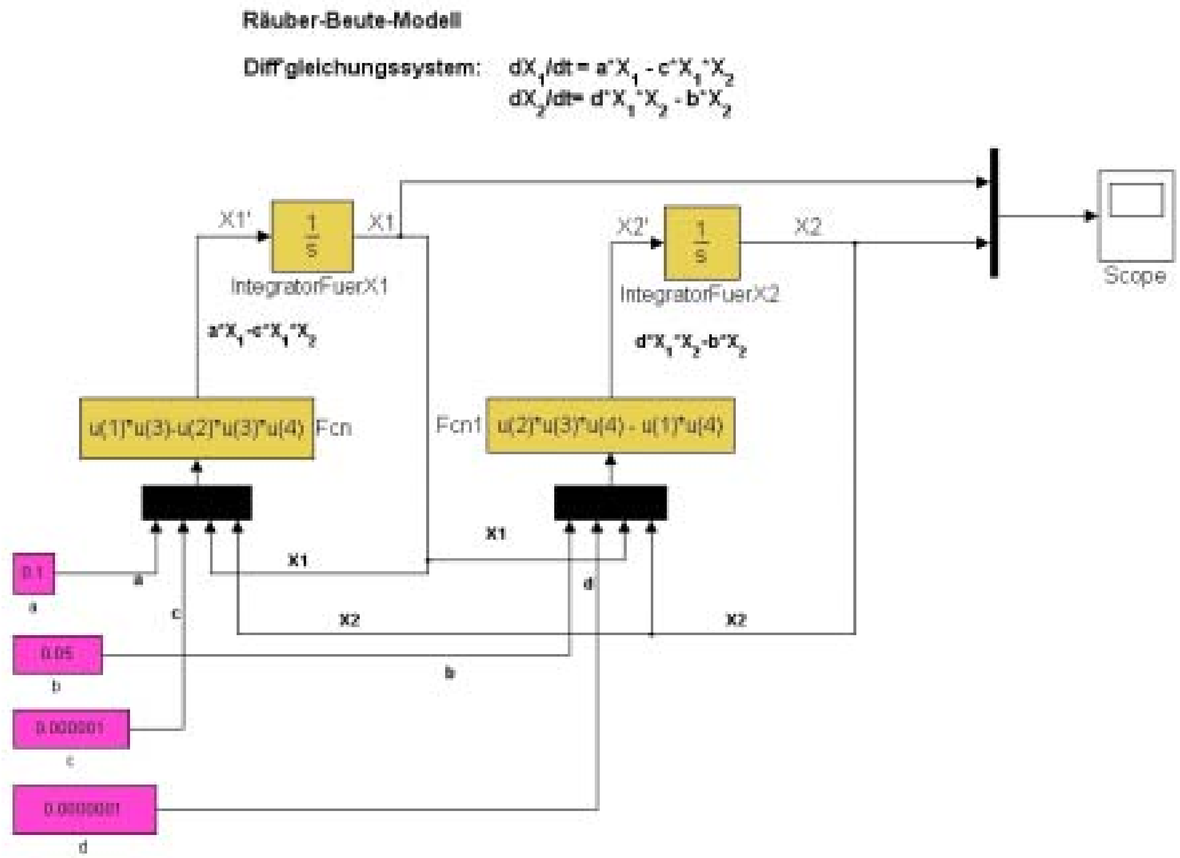


Abb: 4: SIMULINK Modell zum klassischen Räuber-Beute-Prinzip

Anders formuliert: Ernährt sich eine Organismenart (Räuber) ausschliesslich von einer anderen Art (Beute) desselben Lebensraumes und wandern Organismen weder zu noch ab, so steigt die Zahl der Räuber an, wenn es genug Beuteorganismen gibt. Sobald aber der Vorrat an Beuteorganismen erschöpft ist, beginnen sich die Räuber zu verringern. Bei weniger Räubern ist es der Beutepopulation möglich, sich zu regenerieren und wiederum zu vergrössern. Somit sind die Populationen der Räuber- und Beuteorganismen voneinander abhängig.

Mittels SIMULINK kann ein Graph mit zwei Kurven, also mit dem Kurvenverlauf der Beute- als auch die der Räuberpopulation beschrieben werden. Der XY-Graph von Abbildung 6 vereinigt in einem Punkt sowohl die Grösse der Beute- als auch der Räuberpopulation. Es ist die Umsetzung der beiden Kurven.

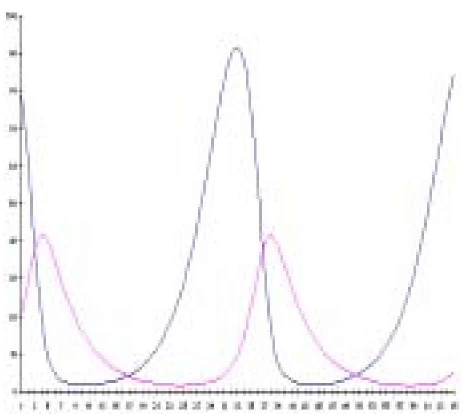

Abb. 5: blau: Beute; rosa: Räuber

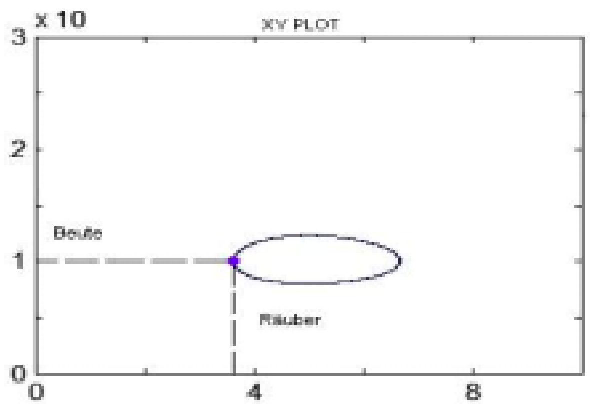


Abb.6: XY-Graph der beiden Kurven aus Abb.4

## Das Volterra-Prinzip

Die Vorgänge in der Natur sind nicht linear und nicht lineare Systeme weisen ein eher unerwartetes Verhalten auf. Dies kann durch das Volterra-Prinzip aufgezeigt werden.
Als Beispiel für die Anwendung des Volterra-Prinzip in der Natur kann man wiederum das Pansensystem heranziehen. Beim Wechsel von der sommerlichen Grasdiät zur Heudiät im Winter können sich die Populationen der Ciliaten (Räuber) und die Population der Prokaryoten (Beute) mit der Rate **e** verändern.
Die Differentialgleichungen des Volterra-Prinzip sind praktisch identisch mit der des Räuber-Beute-Modells, durch die Veränderung e ergänzt

**$dX_1/dt = a{*}X_1 - c{*}X_1{*}X_2 - e{*}X_1^2$** — **$X_1$ = Beute**

**$dX_2/dt = -b{*}X_2 + d{*}X_1{*}X_2 - e{*}X_2^2$** — **$X_2$ = Räuber**

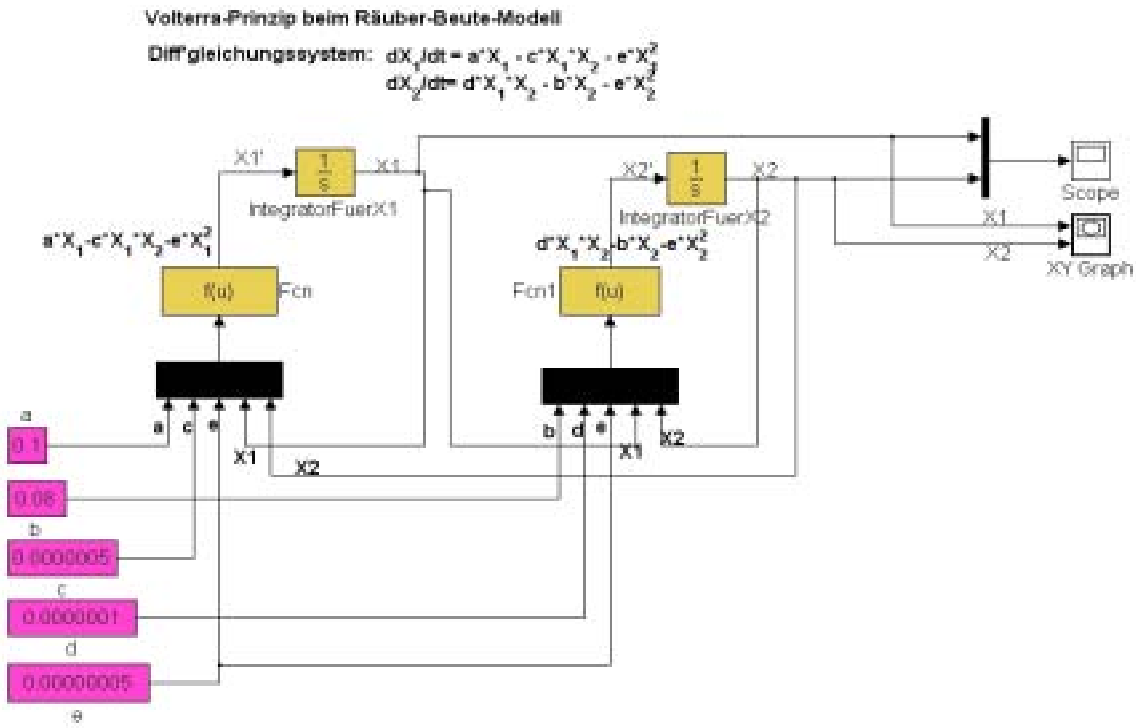


Abb.7. SIMULINK- Modell zum Volterra-Prinzip

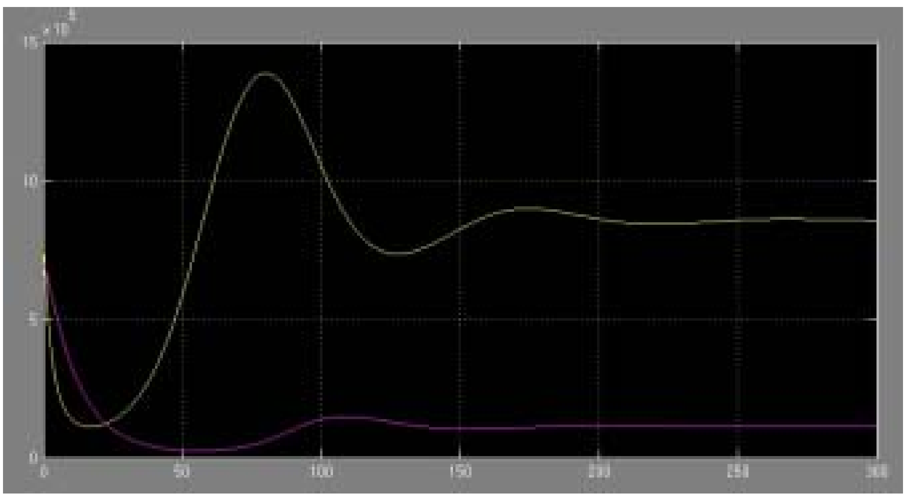


Abb. 8:Graphen zur Räuber- (violett) und Beutepopulation (gelb)

Nach einem heftigen Anstieg der Beutepopulation, welcher durch die geringe Räuberpopulation bedingt ist, folgt ein durch Räuberzuwachs verursachter Rückgang der Beutepopulation. Diese Vorgänge wiederholen sich, bis sich die Populationen mit der Zeit einpendelt und konstant bleiben. Die Räuberpopulation erholt sich nach einer ersten enormen Abnahme nur geringfügig, verläuft danach aber, ebenfalls nach langsamem Einpendeln, in einem konstanten Verhältnis zur Beutekurve. Räuberpopulation:Beutepopulation haben sich aneinander angepasst.

Der XY-Graph (Abb. 9) weist eine spiralförmige Kurve auf, die in einem Punkt am Ende der Spirale stehen bleibt, da das Verhältnis der Räuber und der Beute konstant bleibt.

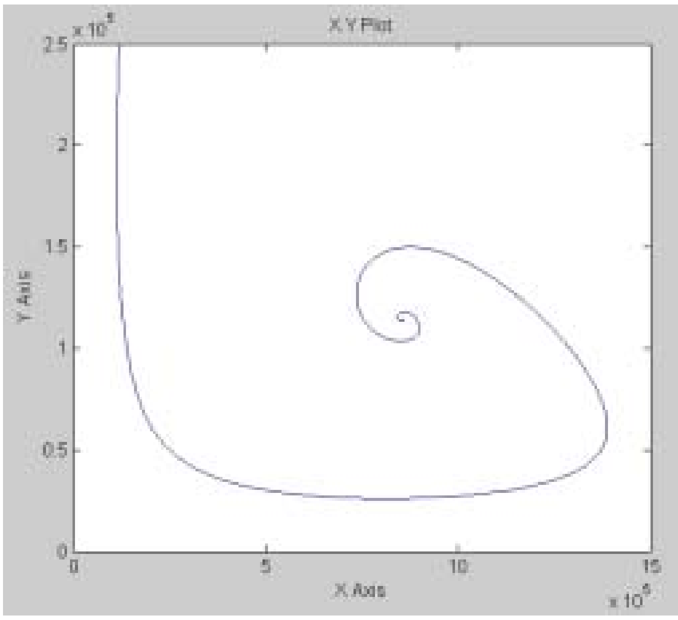


Abb. 9: XY-Graph zum Volterra- Prinzip. X Achse = Beute, Y Achse = Räuber

Bei zwei Räuberpopulationen und nur einer Beutepopulation sehen die Differentialgleichungen folgendermassen aus

$$\mathbf{dX_1/dt = a_1 * X_1 - b_{12} * X_1 * X_2 - b_{13} * X_1 * X_3}$$
$$\mathbf{dX_2/dt = b_{21} * X_1 * X_2 - a_2 * X_2}$$
$$\mathbf{dX_3/dt = b_{31} * X_1 * X_3 - a_3 * X_3}$$

Bei diesem System kann ein Eingriff von Aussen mitberücksichtigt werden, wobei dies eine Phasenverschiebung im Graphen bedeutet. Der Bestand beider Populationen wird demnach verschoben.

Wenn zwei Arten, die dem Räuber-Beute-System folgen, durch einen umweltbedingten Einfluss im gleichen Verhältnis reduziert werden, so nimmt die Beutepopulation zu, während die Räuber abnehmen.
Bei zwei konkurrenzierenden Populationen $N_1$ und $N_2$, welche die gleiche ökologische Nische einnehmen sowie dieselbe Beute jagen, resultieren die folgenden Differentialgleichungen:

$$\mathbf{dX_1/dt = a * X_1 - c * X_1 * X_2 - e * X_1^2}$$
$$\mathbf{dX_2/dt = b * X_2 - d * X_1 * X_2 - f * X_2^2}$$

## 3. Anhang

Abb.1- 9 stammen von Simulink bzw. Matlab
Abb.5 stammt aus http://www.schulen.eduhi.at

**Weitere Quellen:**

BBOM: Madigan M.T., J.M. Martinko and J.Parker: „Brock- Biology of Microorganisms", 10th Edition 2003, Prentice Hall. Kapitel: 6.1, 6.3-6.6

www.simolife.unizh.ch
www.ifi.unizh.ch/ailab/people/arbenz2